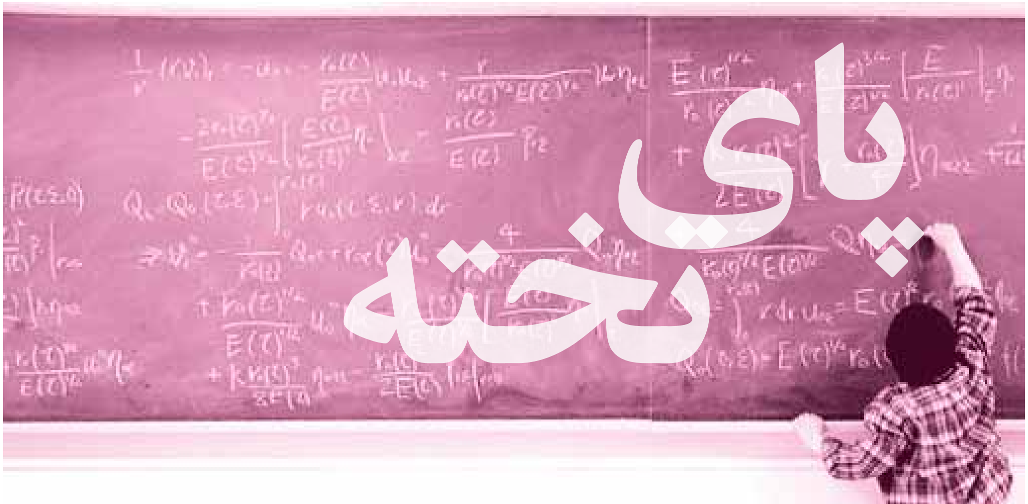
دکتر محرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.

منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۶۱. با فرض $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و با فرض $f_1(x)=f(x)$، $f_k=f_1 o f_{k-1}$. مطلوب است مقدار $f_{2015}(2015)$.

۱۶۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

۱۶۳. N عددی است که در آن هر رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ دقیقاً ۳بار به‌کار رفته، اما رقم ۸ در این عدد به‌کار نرفته است. ثابت کنید N مربع کامل نیست.

۱۶۴. برای هر عدد طبیعی n، $f(n)$ برابر است با تعداد روش‌های نوشتن n به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی. مانند: $n=a_1+a_2+\dots+a_k$، به‌طوری که: $a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_k\leq a_{k+1}$. برای مثال: $f(4)=4$، چون: ۱+۱+۱+۱=۱+۱+۲=۲+۲=۴. اکنون $f(n)$ را برحسب n به‌دست آورید.

۱۶۵. آیا توانی از ۲ وجود دارد که چهار رقم سمت راستش برابر ۲۰۱۴ باشد؟

۱۶۶. جملهٔ ۲۰۱۵-اُم در دنبالهٔ ...,۱,۲,۲,۳,۳,۳,۴,۴,۴,۴ را به‌دست آورید.

۱۶۷. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی فرد n، $1^n+2^n+\dots+n^n$ بر n^2 بخش‌پذیر است.

۱۶۸. nضلعی منتظمی در صفحه رسم شده است، به‌طوری‌که هیچ‌کدام از اضلاع آن عمودی نیست. اگر m_1، m_2، ... و m_n به ترتیب شیب اضلاع باشند، ثابت کنید:

$$m_1m_2+m_2m_3+\dots+m_{n-1}m_n+m_nm_1=-n$$

۱۶۹. نه خط راست داریم که هر کدام مربع ABCD را به دو چهارضلعی با نسبت مساحت ۲ به ۳ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید سه‌تا از این خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

۱۷۰. چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n، حداق $n+1$، ریشهٔ متمایز دارد. ثابت کنید: $P(x)$ چندجمله‌ای صفر است ($P(x)=0$ به ازای هر $x\in R$).

■بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۳۱. بدون استفاده از ماشین حساب عدد ۱۵۹۹۹۹ را به عامل‌های اول تجزیه کنید.

$$۱۵۹۹۹۹=۴۰۰^۲-۱=۲۰^۴-۱=(۲۰^۲-۱)(۲۰^۲+۱)$$
$$=(۲۰-۱)(۲۰+۱)\times۴۰۱=۳\times۷\times۱۹\times۴۰۱$$

۱۳۲. همهٔ مقادیر صحیح n را بیابید، به‌طوری که حاصل $\frac{n^۳+۸}{n^۲-۴}$ مقداری صحیح داشته باشد.

$$n^۳+۸=n(n^۲-۴)+۴(n+۲)$$
$$\Rightarrow\frac{n^۳+۸}{n^۲-۴}=n+\frac{۴}{n-۲}\Rightarrow n-۲|۴$$
$$\Rightarrow n\in\{۶,-۲,۴,۰,۳,۱\}-\{\pm۲\}$$
$$\Rightarrow n\in\{۰,۱,۳,۴,۶\}$$

۱۳۳. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر a+b، $a^۲+b$ و $a+b^۲$ گویا باشند و $a+b\neq۱$، آن‌گاه ثابت کنید a و b گویا هستند.

چون $a^۲+b$ و $a+b^۲$ گویا هستند، پس تفاضل آن‌ها یعنی $(a-b)(a+b-۱)$ نیز گویاست. چون $a+b-۱$ عدد گویایی غیرصفر است، پس $a-b$ نیز گویاست. نهایتاً چون $a+b$ و $a-b$ گویا هستند، جمع و تفاضل آن‌ها یعنی $۲a$ و $۲b$ گویا هستند. در نتیجه a و b نیز گویا هستند.

۱۳۴. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر $a^۲+b^۲$، $a^۳+b^۳$ و $a^۴+b^۴$ گویا باشند، ثابت کنید a+b و ab گویا هستند.

از تساوی $a^۴+b^۴=(a^۲+b^۲)^۲-۲a^۲b^۲$ و مفروضات مسئله نتیجه می‌شود: $a^۲b^۲\in Q$. سپس از تساوی $(a^۴+b^۴)(a^۲+b^۲)=(a^۶+b^۶)+a^۲b^۲(a^۲+b^۲)$ نتیجه می‌شود: $a^۶+b^۶\in Q$. از طرف دیگر: $a^۶+b^۶=(a^۳+b^۳)^۲-۲a^۳b^۳$. در نتیجه: $a^۳b^۳\in Q$. پس $ab\in Q$.

حال با توجه به تساوی $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)$ نتیجه می‌شود: $a+b\in Q$.

۱۳۵. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $[۲a]+[۲b]\geq[a]+[b]+[a+b]$ ($[x]=$ جزء صحیح x).

اگر $\{x\}$ نشان‌دهندهٔ جزء اعشاری x، یعنی $x-[x]$ باشد، آن‌گاه $x=[x]+\{x\}$. با جای‌گذاری $[a]+\{a\}$ به‌جای a و $[b]+\{b\}$ به‌جای b داریم:

$$[۲a]+[۲b]=۲[a]+[۲\{a\}]+۲[b]+[۲\{b\}]$$
$$[a]+[b]+[a+b]=۲[a]+۲[b]+[\{a\}+\{b\}]$$

در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$$[۲\{a\}]+[۲\{b\}]\geq[\{a\}+\{b\}]$$

با حالت‌بندی روی مقادیر $\{a\}$ و $\{b\}$ (۴ حالت) در بازه‌های $[۰,\frac{۱}{۲})$ و $[\frac{۱}{۲},۱)$ نامساوی به‌راحتی ثابت می‌شود.

۱۳۶. ثابت کنید $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ عددی گویاست.

با فرض $A=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}$ و $B=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ داریم: $A^۳+B^۳=۴$. از طرف دیگر: $AB=-۱$. در نتیجه از تساوی $A^۳+B^۳=(A+B)((A+B)^۲-۳AB)$ و با فرض $S=A+B$ داریم: $S^۳+۳S-۴=۰$.

با تجزیهٔ عبارت داریم: $(S-۱)(S^۲+S+۴)=۰$ که نتیجه می‌دهد $S=۱$. در نتیجه: $A+B=۱$.

۱۳۷. x، y و z سه عدد حقیقی مختلف هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt[۳]{x-y}+\sqrt[۳]{y-z}+\sqrt[۳]{z-x}\neq۰$$

می‌دانیم اگر $a+b+c=۰$، آن‌گاه: $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ (درستی این نتیجه را ثابت کنید و نشان دهید برعکس، اگر $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ آن‌گاه: $a=b=c$ یا $a+b+c=۰$). براساس برهان خلف، فرض کنید:

$$\sqrt[۳]{x-y}+\sqrt[۳]{y-z}+\sqrt[۳]{z-x}=۰$$

در نتیجه:

$$۰=x-y+y-z+z-x=\sqrt[۳]{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

که نتیجه می‌دهد: $x=y$ یا $y=z$ یا $z=x$ که تناقض است. پس عبارت حکم برابر صفر نیست.

۱۳۸. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پیدا کنید که در تساوی $x^۳+y^۳+۳xy=۱$ صدق می‌کنند.

داریم: $x^۳+y^۳+(-۱)^۳=۳xy(-۱)$، در نتیجه: $x+y-۱=۰$ یا $x=y=-۱$ یعنی مکان هندسی، یک خط راست و یک نقطه است. در اینجا نیز از نکتهٔ مسئلهٔ قبل استفاده کردیم.

۱۳۹. برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$\frac{a^۲}{x}+\frac{b^۲}{y}\geq\frac{(a+b)^۲}{x+y}$$

با ساده کردن نامساوی به نامساوی $(ay-bx)^۲\geq۰$ می‌رسیم.

۱۴۰. به ازای هر عدد صحیح n، نشان دهید $n^۴-۲۲n^۲+۹$ مرکب است.

اگر n مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $n^۴-۲۲n^۲+۹$ مضرب ۹ و در نتیجه مرکب است. اگر n مضرب ۳ نباشد، $n^۲$ به فرم $۳k+۱$ است و در نتیجه $n^۴-۲۲n^۲+۹$ مضرب ۳ خواهد شد که نشان می‌دهد مرکب است.